Macroéconomie III | **K. Schubert**
Corrigés des exercices | **2001-2002**

TD 4

Exercice 1 : L'apprentissage par la pratique

1) La productivité marginale privée du capital physique est calculée par les entreprises sans prendre en compte l'externalité causée par l'accumulation du capital. Elle vaut ainsi :

$$pm_p = F'_K = \alpha K^{\alpha-1} (AL)^{1-\alpha}$$

ce qui donne ex post, le progrès technique ayant pour source le stock de capital agrégé ($A = K^\varepsilon$) :

$$pm_p = \alpha K^{\alpha-1} (K^\varepsilon L)^{1-\alpha} = \alpha K^{(1-\alpha)(\varepsilon-1)} L^{1-\alpha}$$

La productivité marginale sociale du capital est elle calculée en internalisant l'externalité. La fonction de production est alors :

$$Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha} = K^\alpha (K^\varepsilon L)^{1-\alpha} = K^{\alpha+(1-\alpha)\varepsilon} L^{1-\alpha}$$

d'où la productivité marginale sociale :

$$pm_s = (\alpha + (1-\alpha)\varepsilon) K^{(1-\alpha)(\varepsilon-1)} L^{1-\alpha}$$

La productivité marginale sociale du capital physique est toujours plus élevée que la productivité marginale privée, puisque la première prend en compte le caractère bénéfique pour l'ensemble de l'économie de l'accumulation privée de capital, à travers l'augmentation du progrès technique, tandis que la seconde ne le fait pas.

Les productivités marginales sociale et privée sont décroissantes en le stock de capital si et seulement si $(1-\alpha)(\varepsilon-1) < 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\varepsilon < 1$. Au contraire, elles sont constantes si et seulement si $\varepsilon = 1$.

Remarquons que comme le taux de dépréciation du capital est supposé nul, ces productivités marginales sociale et privée sont exactement égales au taux d'intérêt réel, respectivement à l'optimum social et à l'équilibre concurrentiel.

2) On suppose $\varepsilon < 1$. Le modèle est alors un modèle à la Ramsey. Sans moteur exogène de croissance (taux de croissance démographique supposé nul), l'économie tend à long terme vers un état stationnaire. Cet état stationnaire est caractérisé par une consommation constante, ce qui nécessite l'égalité du taux d'intérêt réel et du taux de préférence pour le présent, et par un arrêt de l'accumulation du capital, ce qui nécessite un investissement nul (puisqu'il n'y a pas de dépréciation).

A l'optimum social, on a ainsi $pm_s = \rho$, d'où

$$(\alpha + (1-\alpha)\varepsilon) K^{(1-\alpha)(\varepsilon-1)} L^{1-\alpha} = \rho \Leftrightarrow K_s^* = \left(\frac{\alpha + (1-\alpha)\varepsilon}{\rho}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)(1-\varepsilon)}} L^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

tandis qu'à l'équilibre concurrentiel on a $pm_c = \rho$, d'où

$$K_c^* = \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)(1-\varepsilon)}} L^{\frac{1}{1-\varepsilon}} < K_s^*$$

3) On suppose $\varepsilon = 1$. Le rendement marginal du capital est alors constant, à l'optimum social et à l'équilibre concurentiel :

$$\begin{cases} pm_s = L^{1-\alpha} \\ pm_p = \alpha L^{1-\alpha} \end{cases}$$

L'économie connaît maintenant une croissance équilibrée à taux constant. On a :

$$\begin{cases} g_s = \sigma(L^{1-\alpha} - \rho) \\ g_p = \sigma(\alpha L^{1-\alpha} - \rho) \end{cases}$$

Le taux de croissance est plus élevé à l'optimum social qu'à l'équilibre concurrentiel, en raison de l'externalité. Il y a alors place pour une politique économique qui permettrait d'augmenter le rendement privé du capital afin d'inciter les entreprises à accumuler davantage à l'équilibre concurrentiel. Cette politique pourrait par exemple prendre la forme d'une subvention à l'investissement, générateur d'externalités.

Exercice 2 : Dépenses publiques et croissance

Cet exercice est en fait tout à fait similaire au précédent, sauf que la source de l'externalité n'est pas la même : ici, ce sont les dépenses publiques d'infrastructures qui augmentent la productivité marginale du capital privé.

1) La fonction de production de l'économie s'écrit :

$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha} G^{\varepsilon}$$

Quand on passe en taux de croissance, on obtient, sachant que la population est supposée constante,

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} + \varepsilon \frac{\dot{G}}{G}$$

Il est alors clair que l'existence d'un sentier de croissance équilibrée à taux constant (où toutes les variables croissent au même taux constant et non nul) n'est possible que si $\varepsilon = 1 - \alpha$. En effet, dans ce cas, le rendement marginal du capital privé et des dépenses publiques pris ensemble est constant et non pas décroissant, ce qui autorise une croissance soutenue à long terme.

2) Quand $\varepsilon = 1 - \alpha$, la fonction de production s'écrit $Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha} G^{1-\alpha}$ soit, après internalisation de l'externalité de dépenses publiques,

$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha} (\tau Y)^{1-\alpha} \Leftrightarrow Y = \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} L^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} K$$

Le taux d'intérêt après impôt est alors :

$$r = (1-\tau)\frac{\partial Y}{\partial K} = (1-\tau)\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} L^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

On remarque le double effet du taux d'imposition sur le taux d'intérêt réel.

Le taux de croissance de l'économie est alors constant et vaut :

$$g = \sigma(r - \rho) = \sigma\left((1-\tau)\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} L^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \rho\right)$$

Ce taux de croissance est d'autant plus grand que l'économie est peuplée (effet de taille, dont la pertinence empirique est discutable). Il est en revanche d'autant plus faible que l'économie est impatiente (ρ élevé), ce qui est conforme à l'intuition : une économie impatiente privilégie une forte consommation immédiate au détriment de la consommation future. Enfin, l'effet du taux d'imposition sur le taux de croissance est ambigü.

3) On voit aisément que quand le taux d'imposition est nul et quand il est égal à 100%, le taux d'intérêt est nul et le taux de croissance de l'économie est négatif et vaut $-\sigma\rho$. On vérifie en outre que le taux de croissance est une fonction croissante puis décroissante du taux d'imposition, et que le maximum du taux de croissance est atteint pour un taux d'imposition $\tau^* = 1 - \alpha$. En deça de ce taux, l'imposition est modérée et l'augmenter favorise la croissance car l'effet positif sur la productivité privée qui transite par les dépenses publiques l'emporte sur l'effet négatif dû à l'alourdissement des charges qui pèsent sur les entreprises. C'est l'inverse au delà de ce taux.

4) On suppose maintenant $\varepsilon \neq 1 - \alpha$. La fonction de production s'écrit alors $Y = K^\alpha L^{1-\alpha} G^\varepsilon$ soit, après internalisation de l'externalité de dépenses publiques,

$$Y = K^\alpha L^{1-\alpha}(\tau Y)^\varepsilon \Leftrightarrow Y = \tau^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} L^{\frac{1-\alpha}{1-\varepsilon}} K^{\frac{\alpha}{1-\varepsilon}}$$

et la productivité marginale du capital vaut :

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\alpha}{1-\varepsilon}\tau^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} L^{\frac{1-\alpha}{1-\varepsilon}} K^{\frac{\alpha-1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

Elle est décroissante si et seulement si $\alpha - 1 + \varepsilon < 0$, soit $\varepsilon < 1 - \alpha$. Dans ce cas, cette économie se comporte comme une économie à la Ramsey. En l'absence de croissance de la population, les variables en niveau tendent à long terme vers un état stationnaire.

5) Cet état stationnaire est défini par l'égalité du taux d'intérêt réel et du taux d'actualisation, qui garantit la constance de la consommation :

$$\begin{aligned} & (1-\tau)\frac{\alpha}{1-\varepsilon}\tau^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} L^{\frac{1-\alpha}{1-\varepsilon}} K^{\frac{\alpha-1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = \rho \\ \Leftrightarrow \quad & K^* = \left(\frac{(1-\tau)\frac{\alpha}{1-\varepsilon}\tau^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} L^{\frac{1-\alpha}{1-\varepsilon}}}{\rho}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{1-\alpha-\varepsilon}} = \left(\frac{(1-\tau)\alpha}{(1-\varepsilon)\rho}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{1-\alpha-\varepsilon}} \tau^{\frac{\varepsilon}{1-\alpha-\varepsilon}} L^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varepsilon}} \end{aligned}$$

Cet état stationnaire est également défini par l'arrêt de l'accumulation du capital. On a donc $\dot{K} = 0$, soit

$$Y^* = C^* + G^* = C^* + \tau Y^* \Leftrightarrow C^* = (1-\tau)Y^*$$

On montre aisément que l'on a

$$Y^* = \tau^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} L^{\frac{1-\alpha}{1-\varepsilon}} (K^*)^{\frac{\alpha}{1-\varepsilon}} = \left[\tau^\varepsilon L^{1-\alpha}\left(\frac{(1-\tau)\alpha}{(1-\varepsilon)\rho}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\varepsilon}}$$

d'où

$$C^* = (1-\tau)Y^* = \left[\tau^{\varepsilon}(1-\tau)^{1-\varepsilon}L^{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{(1-\varepsilon)\rho}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\varepsilon}}$$

On désire maintenant étudier l'influence du taux d'imposition sur la consommation stationnaire. On montre à partir de l'expression précédente que l'on a :

$$\frac{\partial C^*}{\partial \tau} = 0 \Leftrightarrow \tau = \varepsilon$$

Il existe donc un taux d'imposition qui maximise le niveau de la consommation stationnaire.

TD 5

Exercice : La croissance d'un monde à deux régions avec activités de recherche

I. Croissance d'une économie à la Solow avec activité de recherche

1. La fonction de production (1) est une Cobb–Douglas à rendements d'échelle constants.

$(1-a^N)L^N$ est l'emploi productif et $A_t^N(1-a^N)L^N$ le travail efficace, A_t^N étant un terme de progrès technique augmentant le travail. En unités de travail efficace, on a simplement

$$y_t^N = k_t^{N\,\alpha}$$

2. D'après l'équation (2), le taux du progrès technique est constant au cours du temps et vaut :

$$\frac{\dot{A}^N}{A^N} = B^N a^N L^N$$

Il est d'autant plus grand que le nombre de chercheurs ($a^N L^N$) est élevé et que l'efficacité de la recherche (B^N) est grande.

3. Avec les hypothèses du modèle (taux d'épargne constant, taux de dépréciation du capital nul, pas de croissance démographique) l'équation d'accumulation du capital et l'équation d'accumulation du capital en unités de travail efficace s'écrivent :

$$\dot{K}_t^N = s^N Y_t^N$$

et

$$\dot{k}_t^N = s^N y_t^N - \frac{\dot{A}^N}{A^N}k_t^N = s^N\, k_t^{N\,\alpha} - B^N a^N L^N k_t^N$$

4. La solution stationnaire de l'équation différentielle en k^N existe et est unique ; elle vaut :

$$(k^N)^* = \left(\frac{s^N}{B^N a^N L^N}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$(k^N)^*$ est d'autant plus grand que le taux d'épargne est élevé et que le nombre de chercheurs est faible. Les effets du taux d'épargne et du taux du progrès technique sont habituels : davantage d'épargne signifie davantage d'investissement et donc d'accumulation du capital ; davantage de chercheurs et donc un taux du progrès technique plus élevé signifie un travail plus efficace qu'il faut doter en capital et donc un $(k^N)^*$ d'équilibre plus faible à épargne donnée.

5. A long terme, le capital en unités de travail efficace est constant au niveau $(k^N)^*$ et K_t^N et A_t^N croissent donc au même taux. Ainsi, le taux de croissance de long terme de cette économie est

$$g^N = B^N a^N L^N$$

II. Croissance d'un monde à deux régions avec apprentissage technologique dans le "Sud"

6. L'équation (4) indique que le Sud est dépendant du Nord pour l'évolution de son niveau technologique. Plus précisément, l'augmentation du niveau technologique du Sud est fonction de l'écart technologique entre Nord et Sud ; plus ce dernier est grand plus les possibilités d'apprentissage sont grandes pour le Sud ; si le niveau technologique du Sud rattrape celui du Nord il n'y a plus d'apprentissage possible et plus d'augmentation de ce niveau.

7. Soit $Z_t = A_t^S / A_t^N$ le rapport des niveaux technologiques dans le Sud et dans le Nord. On a :

$$\frac{\dot{Z}_t}{Z_t} = \frac{\dot{A}_t^S}{A_t^S} - \frac{\dot{A}_t^N}{A_t^N} = \frac{B^S a^S L^S \left(A_t^N - A_t^S\right)}{A_t^S} - \frac{\dot{A}^N}{A^N} = B^S a^S L^S \left(\frac{1}{Z_t} - 1\right) - B^N a^N L^N$$

d'où l'équation différentielle régissant l'évolution de Z_t au cours du temps :

$$\dot{Z}_t = B^S a^S L^S - \left(B^S a^S L^S + B^N a^N L^N\right) Z_t$$

La solution stationnaire de cette équation est :

$$Z^* = \frac{B^S a^S L^S}{B^S a^S L^S + B^N a^N L^N}$$

Elle est stable (cf. graphique). Z^* est toujours inférieur à 1, c'est-à-dire qu'à long terme le niveau technologique du Sud est toujours plus faible que celui du Nord.

On a :

$$\frac{\partial Z^*}{\partial a^N L^N} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Z^*}{\partial a^S L^S} = \frac{Z^*}{a^S L^S}(1 - Z^*) > 0$$

Le ratio des niveaux technologiques au Sud et au Nord diminue donc quand le nombre de chercheurs au Nord augmente et augmente quand le nombre de personnes engagés dans l'apprentissage au Sud augmente. Il apparaît d'une part un effet de taille (plus la population du Sud est grande par rapport à celle du Nord moins l'écart technologique est important), et d'autre part un effet positif de l'effort d'apprentissage du Sud.

8. Le taux du progrès technique au Sud est :

$$\frac{\dot{A}_t^S}{A_t^S} = \frac{B^S a^S L^S \left(A_t^N - A_t^S\right)}{A_t^S} = B^S a^S L^S \left(\frac{1}{Z_t} - 1\right)$$

d'où, à long terme, quand Z a convergé vers sa valeur stationnaire,

$$\frac{\dot{A}_t^S}{A_t^S} = B^S a^S L^S \left(\frac{1}{Z^*} - 1 \right) = B^S a^S L^S \left(\frac{B^S a^S L^S + B^N a^N L^N}{B^S a^S L^S} - 1 \right) = B^N a^N L^N$$

Ce taux est donc constant à long terme, et égal au taux du progrès technique dans le Nord.

9. Le taux de croissance de long terme de l'économie du Sud est ainsi également $g^S = g^N = B^N a^N L^N$. Ce taux est entièrement déterminé par l'effort de recherche du Nord ; l'effort d'apprentissage du Sud en particulier ne joue aucun rôle.

Par analogie avec la première partie, on a à long terme

$$(k^S)^* = \left(\frac{s^S}{B^N a^N L^N} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

10. ρ est le rapport de la production par tête dans le Sud à la production par tête dans le Nord. On a :

$$\rho_t = \frac{Y_t^S / L^S}{Y_t^N / L^N} = \frac{y_t^S A_t^S (1 - a^S)}{y_t^N A_t^N (1 - a^N)}$$

Quand les deux régions ont convergé vers leur sentier de croissance équilibrée, ce rapport vaut :

$$\rho^* = \frac{(y^S)^*}{(y^N)^*} Z^* \frac{1 - a^S}{1 - a^N} = \left(\frac{(k^S)^*}{(k^N)^*} \right)^{\alpha} Z^* \frac{1 - a^S}{1 - a^N} = \left(\frac{s^S}{s^N} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} Z^* \frac{1 - a^S}{1 - a^N}$$

11. Quand $a^N = a^S$ et $s^N = s^S$ on a, quand les deux régions ont convergé vers leur sentier de croissance équilibrée,

$$\rho^* = Z^* < 1$$

Le PIB par tête est donc plus faible au Sud qu'au Nord.

12. Quand $a^N = a^S$ mais $s^N \neq s^S$, on a

$$\rho^* = \left(\frac{s^S}{s^N} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} Z^* = \left(\frac{s^S}{s^N} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{B^S L^S}{B^S L^S + B^N L^N}$$

Un rattrapage de l'économie du Nord par l'économie du Sud en terme de produit par tête le long du sentier de croissance équilibrée signifierait que ρ^* atteint (au moins) 1. On doit donc avoir, pour qu'il y ait rattrapage,

$$\left(\frac{s^S}{s^N} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{B^S L^S}{B^S L^S + B^N L^N} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{s^S}{s^N} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 1 + \frac{B^N L^N}{B^S L^S} \Leftrightarrow s^S = s^N \left(1 + \frac{B^N L^N}{B^S L^S} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} > s^N$$

Le Sud doit donc consentir un effort en terme d'épargne pour rattraper le Nord. Son taux d'épargne doit être plus élevé que celui du Nord, et ce d'autant plus que la population du Nord est grande par rapport à celle du Sud. Cet effort d'épargne s'accompagne d'un sacrifice en terme de consommation par tête.

13. Quand $s^N = s^S$ mais $a^N \neq a^S$, on a

$$\rho^* = Z^* \frac{1 - a^S}{1 - a^N} = \frac{B^S L^S}{B^S L^S + B^N L^N} \frac{1 - a^S}{1 - a^N}$$

et on doit avoir, pour qu'il y ait rattrapage,

$$\frac{B^S L^S}{B^S L^S + B^N L^N} \frac{1 - a^S}{1 - a^N} = 1 \Leftrightarrow 1 - a^S = (1 - a^N) \left(1 + \frac{B^N L^N}{B^S L^S}\right) > 1 - a^N$$

Le Sud doit donc consacrer une plus grande fraction de sa population que le Nord à produire.